



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2026

CLASA A IX-a

Soluții și bareme de corectare

SUBIECTUL I (40 puncte)

Subiect	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Răspuns corect	C	B	C	D	B	E	A	A	D	D
	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p

SUBIECTUL II (25 de puncte)

Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Arătați că, dacă mulțimea

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \left[\sqrt{(n+a)(n+b)} \right] = n+a \right\}$$

conține cel puțin un număr natural *nenul*, atunci $A = \mathbb{N}$.

(Notația $[x]$ semnifică partea întreagă a numărului real x).

Gazeta Matematică nr. 9 / 2025 (enunț adaptat)

Soluție. Din ipoteză, există cel puțin un element $k \in A$, $k \neq 0$.

Atunci $\left[\sqrt{(k+a)(k+b)} \right] = k+a \Leftrightarrow k+a \leq \sqrt{(k+a)(k+b)} < k+a+1$ **8p**

Din $k+a \leq \sqrt{(k+a)(k+b)}$ rezultă $(k+a)^2 \leq (k+a)(k+b)$, de unde $k+a \leq k+b$, deci $a \leq b$ **6p**

Din $\sqrt{(k+a)(k+b)} < k+a+1$ rezultă $(k+a)(k+b) < (k+a+1)^2$. Deoarece $(k+a)(k+b)$ și $(k+a+1)^2$ sunt numere naturale, obținem $(k+a)(k+b) \leq (k+a+1)^2 - 1 \Leftrightarrow (k+a)(k+b) \leq (k+a)(k+a+2)$, de unde $k+b \leq k+a+2$, deci $b \leq a+2$.

Așadar, $a \leq b \leq a+2$ sau $b \in \{a, a+1, a+2\}$ **6p**

Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr natural, ales arbitrar. Atunci:

$$(n+a)^2 \leq (n+a)(n+b) \leq (n+a)(n+a+2) = (n+a+1)^2 - 1 < (n+a+1)^2 \Leftrightarrow n+a \leq \sqrt{(n+a)(n+b)} < n+a+1,$$

adică $\left[\sqrt{(n+a)(n+b)} \right] = n+a$, ceea ce arată că $n \in A$. În concluzie, $A = \mathbb{N}$ **5p**

SUBIECTUL III (25 de puncte)

Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E, F în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{AD} = \frac{25}{11} \cdot \overrightarrow{AC}$, $2 \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$ și

$$11 \cdot \overrightarrow{BF} = 4 \cdot \overrightarrow{BC}.$$

a) Arătați că dreptele DF și CE sunt paralele.

b) Fie K un punct în planul triunghiului ABC astfel încât $\overrightarrow{AK} = x \cdot \overrightarrow{AC}$, unde $x \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea lui x știind că punctele K, E, F sunt coliniare.

Soluție.

$$2 \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} \Leftrightarrow 2 \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ } \mathbf{2p}$$



$$11 \cdot \overrightarrow{BF} = 4 \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 11 \cdot (\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}) = 4 \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{7}{11} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{11} \cdot \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 2p$$

a) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 3p$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \frac{7}{11} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{11} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{25}{11} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{7}{11} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{21}{11} \cdot \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 3p$$

Avem $\overrightarrow{DF} = \frac{7}{11} \cdot (\overrightarrow{AB} - 3 \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{21}{11} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right) = \frac{21}{11} \cdot \overrightarrow{CE}$ (sau se arată că $\overrightarrow{CE}$ și $\overrightarrow{DE}$ au coordonatele proporționale), deci vectorii $\overrightarrow{CE}$ și $\overrightarrow{DE}$ sunt coliniari, de unde rezultă că $DF \parallel CE \dots\dots\dots 6p$

b) $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} - x \cdot \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 2p$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{7}{11} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{11} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{10}{33} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{11} \cdot \overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 2p$$

Punctele K, E, F sunt coliniare dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{KE}$ și $\overrightarrow{EF}$ au coordonatele proporționale (sunt coliniari), de unde obținem $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{10}{33}} = \frac{-x}{\frac{4}{11}} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \dots\dots\dots 5p$